数理解析研究所講究録 1451 巻 2005 年 216-224

岩澤加群の構造について

慶應義塾大学・理工学部
栗原　将人 (Masato Kurihara)
Department of Mathematics,
Faculty of Science and Technology,
Keio University

p を素数、K を虚アーベル体とする。K の円分 $\mathbf{Z}_p$ 拡大 K_∞ に対し、K_∞ の最大不分岐アーベル pro-p 拡大の Galois 群を X_{K_∞} で表すことにする (岩澤加群とよばれる)。X_{K_∞} を $\mathbf{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q})]]$ 加群と見るとき、その (奇指標成分の) 特性イデアル (Galois 作用の特性多項式で生成されるイデアルと思ってよい) が p 進 L 関数で書けるというのが、有名な岩澤主予想である (Mazur Wiles により証明されている)。

この稿で述べたいことのひとつは、X_{K_∞} についての、より詳しい情報 (特性イデアル、すなわち岩澤主予想より詳しい情報) が、広い意味での p 進 L 関数からわかる、ということである。もうひとつの述べたいことは、今述べたことの証明に使われることなのだが、Gauss 和の Euler 系 (から普通に作られる元の系列) とは違う、大変きれいな性質を持つ元の系列が (K の円分 $\mathbf{Z}_p$ 拡大の乗法群の中に) 存在している、ということである (§3, 特に 8 ページの 5 つの性質)。

1 Results

上で述べたものより、もう少し一般の状況を設定して、得られている結果を述べたいと思う。k を総実代数体、K を CM 体で K/k は有限次アーベル拡大になっているとする。χ を $\mathrm{Gal}(K/k)$ の奇指標で、χ の導手は K/k の導手に等しいとする。さらに p を奇素数とし、簡単のため $[K:k]$ は p と素、χ は Teichmüller 指標 ($\mathrm{Gal}(K/k)$ の 1 の p 巾根 μ_p への作

用を与える指標) とは異なるとする。$O_\chi = \mathbf{Z}_p[\mathrm{Image}(\chi)]$ とおく。K_∞/K を円分 $\mathbf{Z}_p$ 拡大とし、K_∞ の最大不分岐アーベル pro-p 拡大の Galois 群 X_{K_∞} の χ 成分 $X^\chi_{K_\infty}$ を考える (O_χ を $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$ が $\chi(\sigma)$ 倍で作用する $\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]$ 加群と見て、$X^\chi_{K_\infty} = X_{K_\infty} \otimes_{\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)]} O_\chi$ と定義する)。$X^\chi_{K_\infty}$ は、$O_\chi[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]]$ 加群である。$\Lambda = O_\chi[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]]$ とおく。$X^\chi_{K_\infty}$ が O_χ 加群としてねじれがないこと (Iwasawa により証明されている) を使うと、Λ 加群の任意の全射準同型写像 $\Lambda^n \longrightarrow X^\chi_{K_\infty}$ の核は階数 n の自由 Λ 加群になることがわかる。すなわち、

$$0 \longrightarrow \Lambda^n \xrightarrow{f} \Lambda^n \longrightarrow X^\chi_{K_\infty} \longrightarrow 0$$

なる完全系列が存在する。ここで、f に対応する行列 A_f の行列式 $\det A_f$ で生成する Λ のイデアルが $X^\chi_{K_\infty}$ の特性イデアル $\mathrm{char}_\Lambda(X^\chi_{K_\infty})$ に他ならない。

次に、岩澤主予想を述べるために、p 進解析的方面 (p 進ゼータ関数) を準備する。一般に F/k を有限次アーベル拡大とし、

$$\theta_F = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(F/k)} \zeta_k(\sigma, 0)\sigma^{-1}$$

とおく ($\zeta_k(\sigma, s) = \Sigma_{(\mathfrak{a}, F/k)=\sigma} N\mathfrak{a}^{-s}$ は部分ゼータ関数、$(\mathfrak{a}, F/k)$ は Artin 記号)。$k = \mathbf{Q}$ のときは、θ_F はいわゆる Stickelberger element である。$\zeta_k(\sigma, 0) \in \mathbf{Q}$ だから $\theta_F \in \mathbf{Q}[\mathrm{Gal}(F/k)]$ である。

K を上の通りとし、F が K を含み F/K が p 拡大であるとする。$\mathrm{Gal}(F/k) = \mathrm{Gal}(K/k) \times \mathrm{Gal}(F/K)$ から $(\sigma, \tau) \mapsto \chi(\sigma)\tau$ により環準同型 $\mathbf{Q}[\mathrm{Gal}(F/k)] \longrightarrow \mathbf{Q}(\mathrm{Image}\,\chi)[\mathrm{Gal}(F/K)]$ が定義されるが、θ_F のこの写像による像を θ^χ_F と書く。χ が Teichmüller 指標とは異なるときには、$\theta^\chi_F \in O_\chi[\mathrm{Gal}(F/K)]$ となることが知られている (Deligne Ribet)。また、F_∞/F を円分 $\mathbf{Z}_p$ 拡大、F_m を p^m 次の中間体とすると、十分大きな $m > 0$ に対して、$(\theta^\chi_{F_m})$ は射影系をなし、その射影極限として、$\theta^\chi_{F_\infty} \in O_\chi[[\mathrm{Gal}(F_\infty/K)]]$ が定義できる。$F = K$ のとき、上の記号で、$\theta^\chi_{K_\infty} \in \Lambda$ であることに注意する。$\theta^\chi_{K_\infty}$ は L 関数 $L_k(s, \chi)$ の負の整数点での値を補間する p 進関数 (Deligne Ribet の p 進 L 関数) になっている。この $\theta^\chi_{K_\infty}$ を使って、岩澤主予想は

$$\mathrm{char}_\Lambda(X^\chi_{K_\infty}) = (\theta^\chi_{K_\infty})$$

と定式化されている。今の状況だと、この予想は Wiles により証明されている ([7])。

さて一般に、可換環 R 上の加群 M が R 加群の完全系列

$$R^m \xrightarrow{f} R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

を持つとき、M の r 次の Fitting イデアル $\mathrm{Fitt}_{r,R}(M)$ を f に対応する行列 A_f の $n-r$ 次の小行列式全体で生成される R のイデアルとして定義する (cf. [4])。ここに、$r \geq n$ に対しては、$\mathrm{Fitt}_{r,R}(M) = R$ と定義する。$M = X^{\chi}_{K_\infty}$, $R = \Lambda$ のとき、上で述べた状況になっているので、$\mathrm{Fitt}_{0,\Lambda}(X^{\chi}_{K_\infty}) = \mathrm{char}_{\Lambda}(X^{\chi}_{K_\infty})$ であり、岩澤主予想は $\mathrm{Fitt}_{0,\Lambda}(X^{\chi}_{K_\infty}) = (\theta^{\chi}_{K_\infty})$ とも書ける。

ここで述べようとすることは、$\mathrm{Fitt}_{0,\Lambda}(X^{\chi}_{K_\infty})$ だけでなく、すべての $r \geq 0$ に対して、$\mathrm{Fitt}_{r,\Lambda}(X^{\chi}_{K_\infty})$ が p 進 L 関数 $\theta^{\chi}_{F_\infty}$ からわかる、という結果である。

N を十分大きな正の整数とする。$\mathcal{S}$ を次のような条件をみたす体 F の集合とする。すなわち、F は K を含み、$[F:K]$ が p 巾、$F \cap K_\infty = K$ であり、さらに $\mathrm{Gal}(F/K) \simeq \mathbf{Z}/p^{n_1} \times ... \times \mathbf{Z}/p^{n_t}$ と書くとき、$n_1,...,n_t \geq N$ ($t \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ は任意)、およびある小さな条件 (書き上げると複雑なのでここでは省略する、$k = \mathbf{Q}$ のときはこの条件はなし) をみたすような体 F 全体の集合を $\mathcal{S}$ とする。$\mathrm{Gal}(F/K)$ のそれぞれの生成元を $1+S_1,...,1+S_t$ に対応させることにより、

$$\begin{aligned} O_\chi[[\mathrm{Gal}(F_\infty/K)]] &= \Lambda[\mathrm{Gal}(F/K)] \\ &\simeq \Lambda[S_1,...,S_t]/((1+S_1)^{p^{n_1}}-1,...,(1+S_t)^{p^{n_t}}-1) \end{aligned}$$

なる同型が得られるが、

$$\theta^{\chi}_{F_\infty} = \sum_{i_1,...,i_t \geq 0} \delta_{i_1,...,i_t} S_1^{i_1} ... S_t^{i_t}$$

$(\delta_{i_1,...,i_t} \in \Lambda)$ と書いたとき、すべての $F \in \mathcal{S}$ についての

$$\{\delta_{i_1,...,i_t} \mid i_1 + ... + i_t \leq r, i_1 < p, ..., i_t < p\}$$

の像で生成される Λ/p^N のイデアルを $\Theta_r^{(N)}$ と書くことにする ($\theta^{\chi}_{F_\infty}$ の表示によらずにこのイデアルは well defined)。Λ のイデアル Θ_{r,K_∞} を $\Theta_{r,K_\infty} = \varprojlim \Theta_r^{(N)}$ で定義する。$r=0$ のとき $\Theta_{0,K_\infty} = (\theta^{\chi}_{K_\infty})$ である。

ここで、p の上にある k のすべての素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して、$\chi(\mathfrak{p}) \neq 1$ であると仮定する。

また、μ_χ を $X^{\chi}_{K_\infty}$ の岩澤 μ 不変量の χ 成分とするとき、$\mu_\chi = 0$ であると仮定する。これは、$X^{\chi}_{K_\infty}$ が O_χ 加群として有限生成ということと同値である。$\mu = 0$ というのは Iwasawa の予想で、最近一般の CM 体で証明されたとの話もあるが、これを書いている時点では判然としないので、ここでは仮定しておく。なお、$k = \mathbf{Q}$ なら $\mu = 0$ は Ferrero Washington によって証明されている。

この状況で、岩澤主予想は次のように一般化できる。

Theorem 1.1 すべての $r \geq 0$ に対して、$\mathrm{Fitt}_{r,\Lambda}(X_{K_\infty}^\chi) = \Theta_{r,K_\infty}$ が成り立つ。

Remark 1.2 岩澤加群 $X_{K_\infty}^\chi$ ではなく、K のイデアル類群の p-component A_K の χ 成分 A_K^χ についても同様の定理が成立する。このとき、$\mathrm{Fitt}_{r,O_\chi}(A_K^\chi)$ を決定すれば、$A_{K_\chi}^\chi$ の O_χ 加群としての構造は完全に決定するので、次のような構造定理が得られる。$\Theta_{r,K}$ を上と同様に定義した O_χ のイデアルとするとき、O_χ 加群の同型

$$A_K^\chi \simeq \bigoplus_{r\geq 1} \Theta_{r,K}/\Theta_{r-1,K}$$

が成り立つ。なお、$k = \mathbf{Q}$ のときは、この定理は Gauss 和の Euler 系を使うことにより、Kolyvagin Rubin により証明された ([5])。k が一般のときは、[2] で証明されている。Theorem 1.1 は上の構造定理の岩澤加群版である。

2 Key ideas

Theorem 1.1 の証明のアイディアを述べる。まず、$\mathrm{Fitt}_{r,\Lambda}(X_{K_\infty}^\chi) \supset \Theta_{r,K_\infty}$ のポイントは $\theta_{F_\infty}^\chi \in \mathrm{Fitt}_{0,\Lambda[\mathrm{Gal}(F/K)]}(X_{F_\infty}^\chi)$ を示すことである (cf. [1] §8)。この関係は、Wiles によって示された岩澤主予想と $[F:K]$ についての帰納法によって示される ([1])。

次に $\mathrm{Fitt}_{r,\Lambda}(X_{K_\infty}^\chi) \subset \Theta_{r,K_\infty}$ について述べる。K_m を $[K_m:K] = p^m$ なる中間体とし、K_m のイデアル類群 Cl_{K_m} の p-component $A_{K_m} = Cl_{K_m} \otimes \mathbf{Z}_p$ の χ 成分 $A_{K_m}^\chi$ を考えると類体論により $X_{K_\infty}^\chi = \varprojlim A_{K_m}^\chi$ であることにまず注意する。

$X_{K_\infty}^\chi$ の生成元を $c_1,...,c_n$ とし、自由加群 $\bigoplus_{i=1}^n \Lambda e_i$ から $e_i \mapsto c_i$ により全射準同型写像 $\bigoplus_{i=1}^n \Lambda e_i \longrightarrow X_{K_\infty}^\chi$ を作る。この写像の核はやはり階数 n の自由 Λ 加群なので、それを $\bigoplus_{i=1}^n \Lambda f_i$ と書くことにし、この基底に関する $\bigoplus_{i=1}^n \Lambda f_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \Lambda e_i$ の行列を A とする。したがって、

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \Lambda f_i \xrightarrow{A} \bigoplus_{i=1}^n \Lambda e_i \longrightarrow X_{K_\infty}^\chi \longrightarrow 0$$

なる Λ 加群の完全系列が得られている。A の小行列式を K_m に関係するゼータ関数起源のもので近似していく。

記号の煩雑さを避けるために、しばらく $K_m = L$ と書くことにする。c_i の $X_{K_\infty}^\chi \longrightarrow A_{K_m}^\chi = A_L^\chi$ による像も c_i と書くことにし、自然な写像

$A_L \longrightarrow A_L^\chi$ で $\mathbf{c}_i \mapsto c_i$ となるイデアル類 $\mathbf{c}_i$ をとっておく。$\mathbf{c}_i$ に入る素イデアル $\mathcal{L}_i$ で L/k で完全分解しているものをとる。$\mathcal{L}_i$ の下にある k のイデアルを ℓ_i とする。Div_L を L の因子全体がなす群、$\mathcal{D}$ をその素因子がすべて $\ell_1,\ldots,\ell_r$ の上にあるような因子全体がなす Div_L の部分群、$\mathcal{K}$ を $\mathrm{div}(x) \in \mathcal{D}$ となる $x \in L^\times$ 全体がなす $L^\times$ の部分群とする ($\mathrm{div}(x)$ は x が作る単項イデアル $\in \mathrm{Div}_L$)。仮定から $\mathcal{D}$ は階数 r の自由 $\mathbf{Z}[\mathrm{Gal}(L/k)]$ 加群であり、完全系列 $L^\times \longrightarrow \mathrm{Div}_L \longrightarrow Cl_L \longrightarrow 0$ から $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow Cl_L \longrightarrow 0$ なる完全系列が得られる。$(\mathcal{D} \otimes \mathbf{Z}_p)^\chi$ を $\mathcal{D}^\chi$, $(\mathcal{K} \otimes \mathbf{Z}_p)^\chi$ を $\mathcal{K}^\chi$ と書くことにすると、χ 成分をとることにより $\mathcal{K}^\chi \longrightarrow \mathcal{D}^\chi \longrightarrow A_L^\chi \longrightarrow 0$ なる完全系列が得られるが、χ が Teichmüller 指標とは異なる奇指標であることを考えると、$\mathcal{K}^\chi \longrightarrow \mathcal{D}^\chi$ は単射であり、完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^\chi \longrightarrow \mathcal{D}^\chi \longrightarrow A_L^\chi \longrightarrow 0$$

が得られる。

$R_L = O_\chi[\mathrm{Gal}(L/K)]$ とおき、最初の完全系列の $\mathrm{Gal}(K_\infty/L)$-coinvariant をとると、$\chi(\mathfrak{p}) \neq 1$ ($\mathfrak{p} \mid p$) の仮定から、次のような完全系列の可換図式が得られる

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathcal{K}^\chi & \xrightarrow{\mathrm{div}} & \mathcal{D}^\chi & \longrightarrow & A_L^\chi & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n R_L f_i & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n R_L e_i & \longrightarrow & A_L^\chi & \longrightarrow 0
\end{array}$$

ここに、一番右の下向きの写像は恒等写像、ψ は $\mathcal{L}_i \mapsto e_i$ によって定義される同型写像、φ は ψ によって導かれる写像である。$\varphi(x)$ の f_j 成分を $\varphi_j(x)$, $\psi(y)$ の e_i 成分を $\psi_i(y)$ と書くことにする。$\Theta_{r,L}$ を K_∞ に対して定義したのと同じようにして、L に対して定義される R_L のイデアルとする。さて、A の第 i_1 行,..., 第 i_r 行、第 j_1 行,..., 第 j_r 行を除いて得られる行列 B_r を考える。このとき、素イデアル $\mathcal{L}_i$ をうまく選ぶことにより、ある元 $x_r \in \mathcal{K}^\chi$ で、

1) $\varphi_{j_1}(x_r) = \ldots = \varphi_{j_{r-1}}(x_r) = 0$
2) $\varphi_{j_r}(x_r) \in \Theta_{r,L}$
3) $i_1,\ldots,i_r$ 以外の i $(1 \leq i \leq n)$ に対して、$\psi_i(\mathrm{div}(x_r)) = 0$
4) $\psi_{i_r}(\mathrm{div}(x_r)) = \pm \det B_{r-1}$

をみたすようなものを帰納的に構成することができる。1), 3) から線形代数により、$\det B_{r-1}\varphi_{j_r}(x_r) = \pm \det B_r \psi_{i_r}(\mathrm{div}(x_r))$ であるが、($\det B_{r-1}$ が非零因子のときを考えればよく、それを認めれば) 2), 4) から $\det B_r = \pm\varphi_{j_r}(x_r) \in \Theta_{r,L}$ となる。このことから、$\mathrm{Fitt}_{r,R_L}(A_L^\chi) \subset \Theta_{r,L}$ が言える。正確には、mod p^N で上のような議論を行うので、もう少し複雑である

が、ここではアイディアを中心に説明したかったので、上のように述べた。$L = K_m$ のレベルでこの包含関係が言えたので、$m \to \infty$ として、$\mathrm{Fitt}_{r,\Lambda}(X_{K_\infty}^{\chi}) \subset \Theta_{r,K_\infty}$ が示せる。

3 Kolyvagin system の変種について

上で述べた x_r の構成は何段階ものステップがあり、かなり複雑なので、ここでは述べない。そのステップの中で、もっともおもしろいと思われるのは、最近 Mazur と Rubin によって導入された Kolyvagin system ([3]) と関係する部分だと思うので、その部分について述べようと思う。

Mazur と Rubin は有理数体上で考えているが、ここでは総実代数体上に考える。また、Mazur Rubin と異なり素数 p を固定し、係数が $\mathbf{Z}_p$ 加群であるような cohomology だけを考えることにする。

正の整数 N を固定する。k を総実代数体、p と素な k の有限素点 v に対し、$c_v = \mathrm{ord}_p(N(v)-1)$ ($N(v)$ は v のノルム、ord_p は正規 p 進付値) とおく。$c_v \geq N$ であり、p^{c_v} 次巡回拡大 $k(v)/k$ で v で完全分岐、v の外で不分岐なものが存在するような v 全体の集合を $\mathcal{P}$ とし、各 $v \in \mathcal{P}$ に対し、$k(v)$ を固定する。(Chebotarev 密度定理を使うと、このような v がたくさん存在することがわかる。各 v に対し、$k(v)$ は unique ではないが、一つ固定することにする。なお、Mazur Rubin は $k = \mathbf{Q}$ で考えているので、拡大体としては円分体をとっている)。

v の上にある $k(v)$ の (ただ一つの) 素点をやはり v で表し、k_v, $k(v)_v$ をそれぞれ k の v での完備化、$k(v)$ の v での完備化とする。$G_v = \mathrm{Gal}(k(v)/k) = \mathrm{Gal}(k(v)_v/k_v)$ とおく。H_f^1 を $k_v^\times/(k_v^\times)^{p^{c_v}}$ の部分群で、k_v の単数群 $O_{k_v}^\times$ の類で生成するところ、H_t^1 を局所類体論の相互写像によって誘導される全射準同型写像

$$\phi_v : k_v^\times/(k_v^\times)^{p^N} \longrightarrow \mathrm{Gal}(k(v)_v/k_v) = G_v$$

の核と定義する。すぐにわかるように

$$k_v^\times/(k_v^\times)^{p^{c_v}} = H_f^1 \oplus H_t^1$$

が成立する。また、定義により、H_f^1 は付値から導かれる全射

$$\partial_v : \quad k_v^\times/(k_v^\times)^{p^{c_v}} \longrightarrow \mathbf{Z}/p^{c_v}$$

の核である。この２つの写像 ϕ_v, ∂_v はこれから重要な役割を果たす。また、記号法から推測できるかもしれないが、H_f^1, H_t^1 はもっと一般の Galois

加群 M に対する $H^1(k_v, M)$ に対しても定義できる。普通の Selmer 群は H^1_f についての local condition で定義されるが、H^1_t についての local condition も考えようというのが、Kolyvagin system の考え方である。また、$k_v^\times/(k_v^\times)^{p^{c_v}}$ の上のような分解は、結び目理論の longitude, meridian との関係を想起させる (結び目理論と整数論との関係については 九大の森下氏による研究を参照せよ)。

L/k を有限次アーベル拡大、$\mathcal{P}$ の中で L で完全分解する素点全体を $\mathcal{P}_L$ と書く。$\mathcal{R}_L = \mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(L/k)]$ とおく。$v \in P_L$ に対して、v の上にある L の素点 w をとると、$L_w = k_v$ である。このような w を 各 v に対し、一つ固定する。写像 ϕ_v から

$$\phi_v : L^\times \longrightarrow \bigoplus_{w|v} G_v \simeq \mathcal{R}_L \otimes G_v$$

なる写像が定義されるが (最後の同型は固定した w で作ることにする)、これも ϕ_v と書くことにする。また、付値 ∂_v は

$$\partial_v : L^\times \longrightarrow \bigoplus_{w|v} \mathbf{Z}_p \simeq \mathcal{R}_L$$

を導く。

$\mathcal{N}$ を $\mathcal{P}_L$ の元の square free product 全体の集合、$\mathfrak{n} \in \mathcal{N}$ に対し、$G_\mathfrak{n} = \bigotimes_{v|\mathfrak{n}} G_v$ とおく。ここで、元の系列 $(\kappa_\mathfrak{n})$ $(\mathfrak{n} \in \mathcal{N})$ が Kolyvagin system であるとは、$\kappa_\mathfrak{n} \in L^\times \otimes G_\mathfrak{n}$ であり、
I) $\partial_v(\kappa_\mathfrak{n}) = 0$ for all $v \not| \ \mathfrak{n}$,
II) $\phi_v(\kappa_\mathfrak{n}) = 0$ for all $v|\ \mathfrak{n}$,
III) $\partial_v(\kappa_\mathfrak{n}) = -\phi_v(\kappa_{\mathfrak{n}/v})$ for all $v \mid \mathfrak{n}$
をみたすこと、と定義される。I) と III) では、∂_v, ϕ_v はそれぞれ、$\partial_v : L^\times \otimes G_\mathfrak{n} \longrightarrow \mathcal{R}_L \otimes G_\mathfrak{n}$, $\phi_v : L^\times \otimes G_{\mathfrak{n}/v} \longrightarrow \mathcal{R}_L \otimes G_\mathfrak{n}$ と考え、II) では ϕ_v は $\phi_v : L^\times \otimes G_\mathfrak{n} \longrightarrow \mathcal{R}_L \otimes G_{\mathfrak{n}v}$ と考えている。$[L:k]$ が p と素なら、一般に Euler system から Kolyvagin system が作れることが知られているが、そのとき II) の等式は非自明である ([3])。

さて、われわれの場合に戻ろう。§2 のように $L = K_m$ を考える。$L^\times$ ではなく、mod p^N したものの χ 成分 $(L^\times/(L^\times)^{p^N})^\chi$ の中の Kolyvagin system を考える。まず、一般の k に対しても、$k = \mathbf{Q}$ のときに存在した Gauss 和の Euler system の類似を構成できる (鍵となるのは、χ 成分についての Brumer 予想を証明することである cf. [2])。ただし、この Euler system は Gauss 和型の Euler system なので、[6] や [3] の議論が使えない部分があることに注意しておく。今の場合、$[L:k]$ が p で割れるので、[3] にある抽象的な Kolyvatin system の構成法は使えない。そこ

で、Euler system から具体的に構成するのだが、このとき、このようにしてできた Kolyvagin system (の変種) は、普通の Kolyvagin system の性質以上の非常にきれいな性質を持っている。

具体的に述べる。§2 のように $R_L = O_\chi[\mathrm{Gal}(L/K)]$ とおく。$\mathfrak{n} = v_1 \cdot \ldots \cdot v_t$ として、F を L と $k(v_1),\ldots,k(v_t)$ の合成体とする。G_{v_i} の生成元 σ_i を $1+S_i$ に対応させることにより、§1 に述べたように、$O_\chi[\mathrm{Gal}(F/L)] \simeq R_L[S_1,\ldots,S_t]/((1+S_1)^{p^{c_{v_1}}}-1,\ldots,(1+S_1)^{p^{c_{v_t}}}-1)$ なる同型を考え、θ_F^χ を S_i の巾係数で表し、$S_1 \cdot \ldots \cdot S_t$ の係数を $\delta_{1,\ldots,1} \in R_L$ とする。ここで、

$$\delta_{\mathfrak{n}} = (-1)^t \delta_{1,\ldots,1} \otimes \sigma_1 \otimes \ldots \otimes \sigma_t \in R_L \otimes G_{\mathfrak{n}}$$

とおく。

このとき、$\kappa_{\mathfrak{n},\mathfrak{l}} \in L^\times/(L^\times)^{p^N} \otimes G_{\mathfrak{n}}$ なる元の系列 $(\kappa_{\mathfrak{n},\mathfrak{l}})$ $(\mathfrak{n}\mathfrak{l} \in \mathcal{N})$ で次の条件をみたすものが ($\mathfrak{n}$ の素因子と $\mathfrak{l}$ に N に関係するある種の条件 (定理の証明にはこの条件がついても問題はない) をつければ) 構成できる。

I) $\partial_v(\kappa_{\mathfrak{n},\mathfrak{l}}) = 0$ for all $v \not| \mathfrak{n}\mathfrak{l}$,

II) $\phi_v(\kappa_{\mathfrak{n},\mathfrak{l}}) = 0$ for all $v \mid \mathfrak{n}$,

III) $\partial_v(\kappa_{\mathfrak{n},\mathfrak{l}}) = -\phi_v(\kappa_{\mathfrak{n}/v,\mathfrak{l}})$ for all $v \mid \mathfrak{n}$

ここまでは、Kolyvagin system の普通の性質である。しかし、次のようなきれいな性質があって、この元はゼータ関数の値と結びついている。

IV) $\partial_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{n},\mathfrak{l}}) = \delta_{\mathfrak{n}}$

V) $\phi_{\mathfrak{l}}(\kappa_{\mathfrak{n},\mathfrak{l}}) = \delta_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}$

ここに、$\partial_{\mathfrak{l}} : L^\times/(L^\times)^{p^N} \otimes G_{\mathfrak{n}} \longrightarrow (R_L/p^N) \otimes G_{\mathfrak{n}}$, $\phi_{\mathfrak{l}} : L^\times/(L^\times)^{p^N} \otimes G_{\mathfrak{n}} \longrightarrow (R_L/p^N) \otimes G_{\mathfrak{n}\mathfrak{l}}$ と考えている。

なお、$\kappa_{1,\mathfrak{l}}$ は $\mathfrak{l}$ の上にある L の固定した素点 $\mathcal{L}$ に対して、$\mathrm{div}(\kappa_{1,\mathfrak{l}}) = \theta_L^\chi \mathcal{L}^\chi$ をみたす乗法群の元 (Gauss 和の Euler system の類似) である。上のように、ここでは mod p^N して考えているが、mod p^N しなくても上の I) - V) が成立するかどうかは、まだよくわかっていない。

このように、Gauss 和型の Kolyvagin system が構成でき、ゼータ関数 θ_F と直接的な関係がある、ということは特筆すべききれいな関係であると思われる。

最後に、この研究には青木美穂氏 (東工大) との discussion が非常に役立ったことを明記し、青木氏に感謝したいと思います。

参考文献

[1] Kurihara, M., Iwasawa theory and Fitting ideals, Crelle's Journal 561 (2003), 39-86.

[2] Kurihara, M., On the structure of ideal class groups of CM fields, Documenta Mathematica Extra Volume Kato (2003), 539-563.

[3] Mazur, B. and Rubin, K., *Kolyvagin systems*, Memoirs of the American Mathematical Society 799 (2004)

[4] Northcott, D. G., *Finite free resolutions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge New York (1976).

[5] Rubin, K., Kolyvagin's system of Gauss sums, in: Arithmetic Algebraic Geometry, G. van der Geer et al eds, Progress in Math 89 (1991) 309-324.

[6] Rubin, K., *Euler systems*, Annals of Math. Studies 147, Princeton Univ. Press (2000).

[7] Wiles, A., The Iwasawa conjecture for totally real fields, Ann. of Math. 131 (1990), 493-540.